Das Vektorprodukt

Vorübung: Finde einen Vektor, der zu jeweils zu den Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix}$ orthogonal ist.

Ansatz: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} = 0$

Mit dem Skalarprodukt ergeben sich zwei Gleichungen:

I $\quad 1n_1 + 2n_2 + 3\,n_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad n_1 = -\,2n_2 - 3\,n_3$
II $\quad 7n_1 + 1n_2 + 4n_3 = 0$

I in II: $7(-\,2n_2 - 3\,n_3) + n_2 + 4n_3 = 0$

$-\,14n_2 - 21\,n_3 + n_2 + 4n_3 = 0$

$-13n_2 - 17\,n_3 = 0$

$-13n_2 = 17\,n_3$

$n_3 = -\frac{13n_2}{17}$

Setze $n_2 = 17 \Rightarrow n_3 = -13$. Eingesetzt in I $n_1 = -\,2n_2 - 3\,n_3$ ergibt sich:

$n_1 = -\,2\cdot 17 - 3 \cdot (-13) = -\,34 + 39 = 5$

Der Vektor, der zu beiden orthogonal ist, lautet: $\bar{n} = \begin{pmatrix}5\\17\\-13\end{pmatrix}$.

Würde man diese Rechnung nicht mit konkreten Zahlen, sondern allgemein durchführen, dann würden wir Vektorprodukt herleiten:

Definition: Für Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ heißt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\-(a_1b_3 - a_3b_1)\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}$

(lies: „ $\vec{a}$ kreuz $\vec{b}$“) das Vektorprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Satz: Es gilt $\vec{a} \times \vec{b}$ ist sowohl orthogonal zu $\vec{a}$ als auch zu $\vec{b}$

Beispiel:

$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix} =$

Lösung: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 4 - 3\cdot 1\\ -(1\cdot 4 - 3\cdot 7)\\ 1\cdot 1 - 2\cdot 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\17\\-13\end{pmatrix}$.

Der Betrag von $\vec{c}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot sin\,\phi$$

Beispiel: (Bestimmung eines Normalenvektors und eines Flächeninhalts)
Gegeben ist eine Ebene E durch die Punkte A $(2|5|-1)$, B $(3|7|2)$ und C $(9|6|3)$.
a) Bestimmen sie mithilfe eines Vektorproduktes einen Normalenvektor der Ebene E.
b) Berechnen sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC mithilfe des Vektorproduktes.

a) Jedes Vektorprodukt von zwei Spannvektoren der Ebene ergibt einen Normalenvektor:
z.B. $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}7\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 4 - 3\cdot 1\\ 3\cdot 7 - 1\cdot 4\\ 1\cdot 1 - 2\cdot 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\17\\-13\end{pmatrix}$.
b) Der Flächeninhalt des Dreiecks ist die Hälfte des von den Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aufgespannten Parallelogramms.

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{5^2 + 17^2 + 13^2} = \frac{1}{2}\sqrt{483} \approx 10{,}99$$